「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

三角 － 解三角形

摘要

1. 運用正弦公式：
   $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 ΔABC 的外接圓半徑。
2. 運用餘弦公式：
   $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
   $$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
   $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$
3. 運用射影定理：
   $$a=b\cos C+c\cos B,$$
   $$b=c\cos A+a\cos C,$$
   $$c=a\cos B+b\cos A,$$
4. 內切圓半徑及外接圓半徑：
   (a) 三角形面積為
   $$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$ 。
   $$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ ，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。
   (b) $$S=\frac{r(a+b+c)}{2}=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{abc}{4R}$$ ，
   其中 r 為 ΔABC 的內切圓半徑。
5. 認識三角形旁切圓，即與三角形一邊及另外兩邊延線相切的圓及其半徑計算：
   $$r_A=\frac{2S}{-a+b+c}=\frac{S}{s-a},r_B=\frac{2S}{a-b+c}=\frac{S}{s-b},r_C=\frac{2S}{a+b-c}=\frac{S}{s-c}$$
   另 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}$

拾例

1. 已知三角形 ABC 中的 $\angle A$ 為一直角，$\sin^2 C-\cos^2 C=\frac{1}{4}$，$AB=\sqrt{40}$ 及 $BC=x$，求 x 的值。(HKMO 2001/02 初賽團體)

$$\sin^2 C-\cos^2 C = 2\sin^2 C-1 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 C = \frac{5}{8}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\frac{BC}{\sin 90^\circ} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$x = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}/4} = \frac{4\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = 8$$

2. 已知三角形 ABC 中，$\angle B=30^\circ$，$b=6$，$c=6\sqrt{3}$。求三角形面積的最大值。

答：

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\sin C}{6\sqrt{3}} = \frac{\sin 30^\circ}{6}$$

$$\sin C = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 6\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

C $=$ 60° 或 120°

若 $C=60^\circ$，即 $A=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$

三角形面積 $= \frac{6\times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$。

若 $C=120^\circ$，即 $A=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$

三角形面積 $= \frac{6\times 6\sqrt{3}\times\sin 30^\circ}{2} = 9\sqrt{3}$。

所以三角形面積的最大值為 $18\sqrt{3}$。

3. 在 ΔABC 的三內角 A、B、C 的大小成等差數列（$A<B<C$），且 $\tan A\tan C=2+\sqrt{3}$，求 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的大小。

答： 由於 $\angle A,\angle B,\angle C$ 成等差數列，所以 $\angle B=60^\circ$。

再由於
$$\tan A\tan C = 2+\sqrt{3}$$
$$\begin{aligned}\tan A+\tan C &= \tan(A+C)(1-\tan A\tan C)\\ &= \tan 120^\circ(1-2-\sqrt{3})\\ &= -\sqrt{3}(-1-\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}\end{aligned}$$

於是 $\tan A$ 和 $\tan C$ 便是 $x^2-(3+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})=0$ 的兩根。

$$x^2-(3+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})=(x-1)[x-(2+\sqrt{3})]=0$$

即 $\tan A=1$，$\tan C=2+\sqrt{3}$，即 $\angle A=45^\circ,\angle B=60^\circ,\angle C=75^\circ$。

4. 直角三角形三邊均為正整數，且該直角三角形的周界和面積數值相同，求該直角三角形的三邊。

答： 設直角三角形的直角邊為 a, b（$a\geq b$），斜邊為 c 。

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab=a+b+c\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$$

由上式，得 $c=\frac{1}{2}ab-a-b$，把之代入第二式，得

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (\frac{1}{2}ab-a-b)^2\\ a^2+b^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2+a^2+b^2-a^2b-ab^2+2ab\\ a^2b^2-4a^2b-4ab^2+8ab &= 0\\ ab-4a-4b+8 &= 0\\ (a-4)(b-4)-8 &= 0\\ (a-4)(b-4) &= 8\end{aligned}$$

由於 a, b 均為整數，故 $(a-4),(b-4)$ 亦是整數。但 8 的因子僅 $\pm1.\pm2,\pm4,\pm8$，故得：

$$(a-4,b-4) = (8,1),(4,2)$$

即 $(a,b) = (12,5),(8,6)$

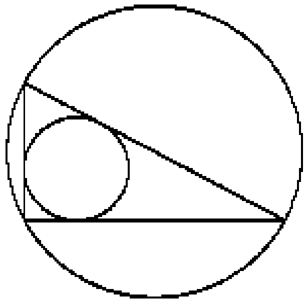
所以該直角三角形的三邊為 $(5,12,13),(6,8,10)$。

5. 已知一圓內接等邊三角形的周界為 30，求該圓半徑。

答： 等邊三角形的邊長為 10，中線長 $\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ 。

等邊三角形四心重疊，故圓心和形心重疊，即半徑 $=\frac{2}{3}\times 5\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 。

6. 如右圖，直角三角形的三頂點在一個半徑為 R 的圓上，且三邊內切於一個半徑為 r 的圓。若三角形兩直角邊長分別為 16 及 30。求 $R+r$ 的值。（COMC 1996）



答： 外接圓直徑為直角三角形的斜邊

$= \sqrt{16^2+30^2} = 34$

故 $R=17$ 。

直角三角形面積 $=\frac{16\times 30}{2}$

$=240$

即 $\frac{r}{2}(16+30+34) = 240$

$40r = 240$

$r = 6$

所以 $R+r = 17+6 = 23$。

7. 三角形 ABC 的三邊 a,b,c 均為整數且 $abc=120$，求該三角形的內切圓半徑。

答： 我們不妨設 $a\le b\le c$，於是 $c\ge 5$。

又 $c<a+b\le 1+ab=1+\frac{120}{c}$，故 $c\le\frac{120}{c}$，得 $c\le 11$

從 120 的因子中，得知 c 只可取 6, 8 或 10。

若取 $c=10$，$ab=12$，即 $(a,b)=(2,6),(3,4)$，不能成為三角形，故無解。

若取 $c=8$，$ab=15$，即 $a=3,b=5$，不能成為三角形，亦無解。

若取 $c=6$，$ab=20$，即 $a=4,b=5$，$p=\frac{1}{2}(4+5+6)=\frac{15}{2}$，

內切圓半徑 $= \sqrt{\frac{(\frac{15}{2}-4)(\frac{15}{2}-5)(\frac{15}{2}-6)}{15/2}}$

$= \sqrt{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{15}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

8.　設三角形的三條高分別長 8, 10, 12，求該三角形內接圓半徑。

答：　設三角形三邊長為 a,b,c ，面積為 S。

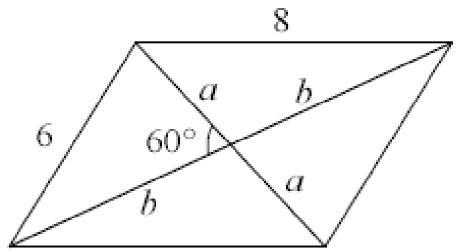
則　$a=\frac{2S}{8}=\frac{S}{4}, b=\frac{2S}{10}=\frac{S}{5}, c=\frac{2S}{12}=\frac{S}{6}$ ，

內接圓半徑 $= \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{S(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}$

$= \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{37/60} = \frac{120}{37}$ 。

9.　某平行四邊形的兩條對角線成 $60°$，且其中兩邊的邊長為 6 和 8。求該平行四邊形的面積。(HKPSC 2008)

答：　設兩對角線的長度分別為 $2a,2b$ 。



得　$6^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$

$8^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°$

即　$8^2=a^2+b^2+2ab\cos 60°$

兩式相減，

$4ab\times\cos 60° = 28$

$ab = 14$

平行四邊形的面積 $= 2\times\frac{1}{2}ab\sin 60°+2\times\frac{1}{2}ab\sin 120°$

$= \sqrt{3}ab = 14\sqrt{3}$

10.　若 ΔABC 中，三邊長 $a=4,b=6,c=8$，

(a)　求連接 A 點至對邊的垂線的長度。

(b)　求連接 B 點至對邊的中線長度。

(c)　求連接 C 點至對邊的角平分線長度。

答：　(a)　令 $s=\frac{4+6+8}{2}=9$，

ΔABC 的面積 $= \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

連結 A 點至對邊的垂線的長度

$= \frac{3\sqrt{3}\times 2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

10(續)(b)　連結 B 點至 AC 的中點 D 點，使 BD 長 x。

根據余弦定理 $a^2 = (\frac{b}{2})^2 + x^2 - 2(\frac{b}{2})x\cos\angle BDC$

$= \frac{1}{4}(b^2 + 4x^2 - 4bx\cos\angle BDC)$

另 $c^2 = (\frac{b}{2})^2 + x^2 - 2(\frac{b}{2})x\cos\angle ADC$

$= \frac{1}{4}(b^2 + 4x^2 + 4bx\cos\angle BDC)$

兩式相加 $a^2 + c^2 = \frac{1}{2}(b^2 + 4x^2)$

求連接 B 點至對邊的中線長度

$= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2(4^2 + 8^2) - 6^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{124} = \sqrt{31}$ 。

(c)　作 C 點的角平分線，使之至 AB 相交於 E 點，使 AE 長 x。

根據角平分線定理 $\frac{CB}{BE} = \frac{CA}{AE}$

$\frac{4}{8-x} = \frac{6}{x}$

$x = \frac{24}{5}$

所以 $AE = \frac{24}{5}, BE = \frac{21}{5}$

在 ΔABC 中運用余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8}$

在 ΔACE 中運用余弦定理 $CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC\cos A$

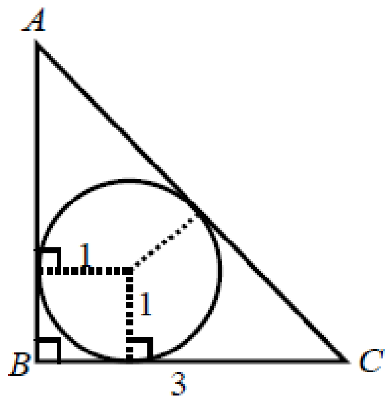
所以 $CE = \sqrt{(\frac{24}{5})^2 + 6^2 - 2(\frac{24}{5})(6)(\frac{7}{8})} = \sqrt{\frac{216}{25}}$

$= \frac{6}{5}\sqrt{6}$ 。

淺問

1. 在ΔABC中，三條垂線 $h_A = 4$、$h_B = 5$、$h_C = 6$。求 $\cos A$的值。

2. 某三角形內角正弦的比為 3:4:5。若 A 為該三角形的最小內角，且 $\cos A = \dfrac{x}{5}$，求 x 的值。(HKMO 1989/90 初賽個人)



3. 右圖中，$\angle B = 90°$，BC = 3，且 ΔABC 的內切圓半徑長 1 單位，求 AC 的長。(HKMO 1988/89 初賽團體)

4. 求下列圓內接三角形 ΔABC 的面積、內切圓半徑、外接圓半徑：
(a) $a = 5, b = 12, c = 13$
(b) $a = b = c = 10$

5. 某三角形內接於一個半徑為 $2\sqrt{3}$ 的圓形內，它各邊長度之比為 3:5:7。求這個三角形的面積。 (HKPSC 2003)

6. 在 ΔABC 中，AB = 15，BC = 14，CA = 13。X 和 Y 分別為 A 到 BC 及 C 到 AB 的垂足。求 XY 的長度。 (培正 2003 高級團體)

7. 在 ΔABC 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:3$，求 $a:b:c$。

8. 在 ΔABC 中，若 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$，求 $\sin A$ 的值。

9. 在 ΔABC 中，$\tan\dfrac{A}{2} = 1$，$\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}$，若該三角形的外接圓半徑為 1 ，求三個旁切圓半徑。

10. 若 ΔABC 中，三邊長 $a = 7, b = 8, c = 9$，
(a) 求連接 A 點至對邊的垂線的長度。
(b) 求連接 B 點至對邊的中線長度。
(c) 求連接 C 點至對邊的角平分線長度。

11. 若 ΔABC 中，三邊長 $a = 9, b = 10, c = 11$，求以三個旁切圓圓心 O_A, O_B, O_C 為頂點組成的 $\Delta O_A O_B O_C$ 的面積。

詳答

1　設 Δ 為三角形面積。

$$a:b:c = \frac{2\Delta}{h_A}:\frac{2\Delta}{h_B}:\frac{2\Delta}{h_C} = \frac{1}{h_A}:\frac{1}{h_B}:\frac{1}{h_C}$$

$$= \frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6} = 15:12:10$$

故令 $a=15k$ 、 $b=12k$ 、 $c=10k$ 。

$$\cos A = \frac{(12k)^2+(15k)^2-(10k)^2}{2(12k)(15k)} = \frac{269}{360}$$

2.　因該三角形三角的正弦比等於三邊之比，故設三邊為 3k、4k、5k。

$$\cos A = \frac{(4k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2(4k)(5k)}$$

$$= \frac{32k^2}{40k^2} = \frac{4}{5}$$

故 $x=4$ 。

3.　令點 A 至圓的切線距離為 x，$AB=x+1$，$AC=x+(3-1)=x+2$，由畢氏定理：

$$AC^2 = AB^2+BC^2$$

$$(x+2)^2 = (x+1)^2+3^2$$

$$x^2+4x+4 = x^2+2x+10$$

$$x = 3$$

$$AC = 3+2 = 5$$

4. (a) $s=\dfrac{5+12+13}{2}=15$，

面積 = $\sqrt{15(15-13)(15-12)(15-5)}$ = $\sqrt{900}$

= 30

內切圓半徑 = $\dfrac{2\times 30}{(5+12+13)}$ = 2

外接圓半徑 = $\dfrac{5\times 12\times 13}{4\times 30}$ = $\dfrac{13}{2}$

(b) $s=\dfrac{10+10+10}{2}=15$，

面積 = $\sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ = $\sqrt{1875}$

= $25\sqrt{3}$

內切圓半徑 = $\dfrac{2\times 25\sqrt{3}}{(10+10+10)}$ = $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

外接圓半徑 = $\dfrac{10\times 10\times 10}{4\times 25\sqrt{3}}$ = $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

5. 設該三角形 ABC，再令 $a=3k, b=5k, c=7k$ 。

$\cos C$ = $\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(3k)(5k)}$ = $-\dfrac{15}{30}$

= $-\dfrac{1}{2}$

所以 C = $120°$

$\dfrac{7k}{\sin 120°}$ = $2(2\sqrt{3})$

k = $\dfrac{2(2\sqrt{3})\times\sin 120°}{7}$ = $\dfrac{2(2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$

= $\dfrac{6}{7}$

所以三角形的面積 = $\dfrac{1}{2}(3k)(5k)\sin 120°$

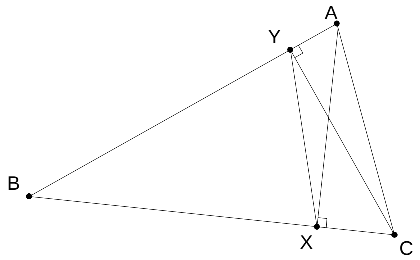
= $\dfrac{1}{2}\times 3\times 5\times(\dfrac{6}{7})^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ = $\dfrac{135}{49}\sqrt{3}$

6. 由餘弦定理可知

$13^2 = 15^2 + 14^2 - 2\times 15\times 14\times \cos B$

而 $BX = 15\cos B$ 及 $BY = 14\cos B$ 。

故在 ΔBXY 中



$$XY^2 = 15^2\cos^2 B + 14^2\cos^2 B - 2\times 15\cos B\times 14\cos B\times \cos B$$

$$= \cos^2 B(15^2 + 14^2 - 2\times 15\times 14\times \cos B)$$

$$= 13^2\cos^2 B$$

所以 $XY = 13\cos B = 13\times\dfrac{14^2+15^2-13^2}{2\times 14\times 15} = \dfrac{39}{5}$ 。

7. 因為在 ΔABC 中，$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$，所以 $\angle A = 30°$、$\angle B = 60°$、$\angle C = 90°$。而 $a:b:c = \sin 30°:\sin 60°:\sin 90°$

$$= \frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1 = 1:\sqrt{3}:2$$

8. $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$

$(b+c)^2 - a^2 = 3bc$

$a^2 = b^2 + c^2 - bc$

另一方面： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

即 $\cos A = \dfrac{1}{2}$，所以 $\sin A = \sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 。

9. $\tan\frac{C}{2} = \tan(90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}) = \frac{1}{\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})}$

$= \frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B} = \frac{1-1\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$\tan\frac{A}{2}=1$，即 $\angle A = 90^\circ$，所以 $\sin A = 1$，

$\tan B = \frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$，$\sin B = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}$

$\tan C = \frac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$，$\sin C = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$

$a = 2R\sin A = 2(1)(1) = 2$

$b = 2R\sin B = 2(1)(\frac{4}{5}) = \frac{8}{5}$

$c = 2R\sin C = 2(1)(\frac{3}{5}) = \frac{6}{5}$

由於 $\angle A = 90^\circ$，所以三角形面積 $S = \frac{1}{2}(\frac{6}{5})(\frac{8}{5}) = \frac{24}{25}$

所以旁切圓半徑分別為：

$r_A = \frac{2S}{-a+b+c} = \frac{2\times\frac{24}{25}}{-2+\frac{8}{5}+\frac{6}{5}} = \frac{12}{5}$，

$r_B = \frac{2S}{a-b+c} = \frac{2\times\frac{24}{25}}{2-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}} = \frac{6}{5}$，$r_C = \frac{2S}{a+b-c} = \frac{2\times\frac{24}{25}}{2+\frac{8}{5}-\frac{6}{5}} = \frac{4}{5}$

10.　(a)　令 $s=\dfrac{7+8+9}{2}=12$，

ΔABC 的面積 $=\sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)}$

$=\sqrt{720}=12\sqrt{5}$

連結 A 點至對邊的垂線的長度

$=\dfrac{12\sqrt{5}\times 2}{7}=\dfrac{24}{7}\sqrt{5}$

(b)　連結 B 點至 AC 的中點 D 點，使 BD 長 x。

根據余弦定理 $a^2=(\frac{b}{2})^2+x^2-2(\frac{b}{2})x\cos\angle BDC$

$=\frac{1}{4}(b^2+4x^2-4bx\cos\angle BDC)$

另 $c^2=(\frac{b}{2})^2+x^2-2(\frac{b}{2})x\cos\angle ADC$

$=\frac{1}{4}(b^2+4x^2+4bx\cos\angle BDC)$

兩式相加 $a^2+c^2=\frac{1}{2}(b^2+4x^2)$

求連接 B 點至對邊的中線長度

$=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2(7^2+9^2)-8^2}=7$。

(c)　作 C 點的角平分線，使之至 AB 相交於 E 點，使 AE 長 x。

根據角平分線定理 $\dfrac{CB}{BE}=\dfrac{CA}{AE}$

$\dfrac{7}{9-x}=\dfrac{8}{x}$

$x=\dfrac{24}{5}$

所以 $AE=\dfrac{24}{5}, BE=\dfrac{21}{5}$

在 ΔABC 中運用余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2}{3}$

在 ΔACE 中運用余弦定理 $CE^2=AE^2+AC^2-2AE\cdot AC\cos A$

所以 $CE=\sqrt{(\frac{24}{5})^2+8^2-2(\frac{24}{5})(8)(\frac{2}{3})}=\sqrt{\frac{896}{25}}$

$=\dfrac{8}{5}\sqrt{14}$

11. 令 $s=\dfrac{9+10+11}{2}=15$

所以 ΔABC 的面積 $S=\sqrt{15(15-11)(15-10)(15-9)}$

$=\sqrt{1800}=30\sqrt{2}$

$\Delta O_A BC$ 的面積 $=\dfrac{ar_A}{2}=\dfrac{aS}{2(s-a)}$

$=\dfrac{9\times 30\sqrt{2}}{2\times(15-9)}=\dfrac{45}{2}\sqrt{2}$

$\Delta O_B CA$ 的面積 $=\dfrac{br_B}{2}=\dfrac{bS}{2(s-b)}$

$=\dfrac{10\times 30\sqrt{2}}{2\times(15-10)}=30\sqrt{2}$

$\Delta O_C AB$ 的面積 $=\dfrac{cr_C}{2}=\dfrac{cS}{2(s-c)}$

$=\dfrac{11\times 30\sqrt{2}}{2\times(15-11)}=\dfrac{165}{4}\sqrt{2}$

所以 $\Delta O_A O_B O_C$ 的面積 $=30\sqrt{2}+\dfrac{45}{2}\sqrt{2}+30\sqrt{2}+\dfrac{165}{4}\sqrt{2}$

$=\dfrac{495}{4}\sqrt{2}$

數學是惟一讓人不知所云、

真假難辨的科學。

英國哲學家、數學家、邏輯學家

羅素

(Bertrand Russell 1872-1970)