「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數列 － 分數數列

摘要

1. 運用分式恆等式對分式數列進行計算及化簡：

   (a) $\dfrac{a}{n(n+a)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+a}$ ，

   (b) $\dfrac{2}{n(n+a)(n+2a)}=\dfrac{1}{n(n+a)}-\dfrac{1}{(n+a)(n+2a)}$

2. 運用常見的分數數列的總和或總積公式：

   (a) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

   (b) $\dfrac{2}{1\times 3}+\dfrac{2}{3\times 5}+\dfrac{2}{5\times 7}+\ldots+\dfrac{2}{(2n-1)\times(2n+1)}=\dfrac{2n}{2n+1}$

3. 運用多項式分解計算分數數列的總和或總積。
4. 介紹常用的數列求和方法，如裂項法、合項法。
5. 解與分數數列相關的方程問題。

拾例

1. 設 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$，求 $f(\frac{0}{9})+f(\frac{1}{9})+f(\frac{2}{9})+...+f(\frac{9}{9})$。

答： $f(x)+f(1-x) = \dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}+\dfrac{(1-x)^3}{1-3(1-x)+3(1-x)^2}$

$= \dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}+\dfrac{(1-x)^3}{(1-x)^3+x^3} = 1$

所以原式 $= [f(\frac{0}{9})+f(\frac{9}{9})]+[f(\frac{1}{9})+f(\frac{2}{9})]+...$

$= \dfrac{10}{2} = 5$

2. 若 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$，求 $f(\frac{1}{2000})+f(\frac{2}{2000})+f(\frac{3}{2000})+...+f(\frac{1999}{2000})$ 的值。

答： $f(\frac{a}{2000})+f(1-\frac{a}{2000}) = \dfrac{9^{\frac{a}{2000}}}{9^{\frac{a}{2000}}+3}+\dfrac{9^{1-\frac{a}{2000}}}{9^{1-\frac{a}{2000}}+3}$

$= \dfrac{9^{\frac{a}{2000}}}{9^{\frac{a}{2000}}+3}+\dfrac{9\times 9^{-\frac{a}{2000}}}{9\times 9^{-\frac{a}{2000}}+3}$

$= \dfrac{9^{\frac{a}{2000}}}{9^{\frac{a}{2000}}+3}+\dfrac{9}{9+3\times 9^{\frac{a}{2000}}}$

$= \dfrac{9^{\frac{a}{2000}}}{9^{\frac{a}{2000}}+3}+\dfrac{3}{3+9^{\frac{a}{2000}}}$

$= 1$

所以原式

$= [f(\frac{1}{2000})+f(\frac{1999}{2000})]+...+[f(\frac{999}{2000})+f(\frac{1001}{2000})]+f(\frac{1000}{2000})$

$= 999\times 1+f(\frac{1}{2})$ $= 999+\dfrac{3}{3+3}$ $= 999.5$

3. 2003 減去它的 $\frac{1}{2}$，再減去剩餘的 $\frac{1}{3}$，再減去剩餘的 $\frac{1}{4}$，…，依次類推，一直減去剩下的 $\frac{1}{2003}$，求最後剩下的數。

（中國重慶市初中數學競賽 2003）

答： 最後剩下的數

$$= 2003(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2003})$$

$$= 2003\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2002}{2003}$$

$= 1$。

4. 若 $S=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\ldots(1-\frac{1}{10^2})$，求 S。

（AHSME 1986）（HKMO 1985/86 決賽團體）

答： S

$$= \frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\ldots\times\frac{10^2-1}{10^2}$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\times\ldots\times\frac{(10-1)(10+1)}{10^2}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\ldots\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{11}{10} = \frac{11}{20}$$ 。

5. 計算 $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{8})\ldots(1+\frac{1}{128})$。

答： 原式

$$= 2(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{8})\ldots(1+\frac{1}{128})$$

$$= 2(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{8})\ldots(1+\frac{1}{128})$$

$= \ldots$

$$= 2(1-\frac{1}{128})(1+\frac{1}{128}) = 2(1-\frac{1}{256})$$

$$= 2\times\frac{255}{256} = \frac{255}{128}$$ 。

6. 求 d。若 $d=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1994})(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1995})$
$-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1995})(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1994})$ 。
(HKMO 1994/95 決賽團體)

答： *設 $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1994}$ 、$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1995}$ ，
故原式可化簡為

$$AB-(B+1)(A-1) = AB-AB-A+B+1 = B-A+1 = \frac{1}{1995}$$

7. 求 $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+...+\frac{1}{99\times100}$ 的值。

答： 原式 $= (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+...+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$
$= \frac{1}{2}-\frac{1}{100} = \frac{49}{100}$ 。

8. 若 $\frac{4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{10}{4\cdot5\cdot6}+...+\frac{100}{34\cdot35\cdot36}=\frac{P}{Q}$ 且 $(P,Q)=1$，求 $P+Q$ 的值。

答： 原式

$$= \sum_{n=1}^{33}\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{33}\frac{3(n+1)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \sum_{n=1}^{33}\frac{3}{(n+2)(n+3)}-\sum_{n=1}^{33}\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= 3\sum_{n=1}^{33}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\sum_{n=1}^{33}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right)-\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{35}\cdot\frac{1}{36}\right)$$

$$= \frac{11}{12}-\frac{209}{1260} = \frac{946}{1260} = \frac{473}{630}$$ 。

故 $P=473, Q=630$ ，即 $P+Q=473+630=1103$ 。

9. 計算 $\dfrac{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2)\ldots(97\times99+2)}{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)\ldots(98\times100+2)}$ 的值。

答： 因 $n(n+3)+2 = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$，

所以 $\dfrac{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2)\ldots(97\times99+2)}{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)\ldots(98\times100+2)}$

$= \dfrac{(1+1)(1+2)(3+1)(3+2)(5+1)(5+2)\ldots(97+1)(97+2)}{(2+1)(2+2)(4+1)(4+2)(6+1)(6+2)\ldots(98+1)(98+2)}$

$= \dfrac{2\times3\times4\times\ldots\times99}{3\times4\times5\times\ldots\times100} = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$。

10. 計算 $\dfrac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})(8^4+\frac{1}{4})(10^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})(7^4+\frac{1}{4})(9^4+\frac{1}{4})}$ 的值。

答： 因為 $x^4+\frac{1}{4} = x^4+x^2+\frac{1}{4}-x^2 = (x^2+\frac{1}{2})^2-x^2$

$= (x^2+x+\frac{1}{2})(x^2-x+\frac{1}{2})$。

故原式

$= \dfrac{(2^2-2+\frac{1}{2})(2^2+2+\frac{1}{2})(4^2-4+\frac{1}{2})(4^2+4+\frac{1}{2})(6^2-6+\frac{1}{2})}{(1^2-1+\frac{1}{2})(1^2+1+\frac{1}{2})(3^2-3+\frac{1}{2})(3^2+3+\frac{1}{2})(5^2-5+\frac{1}{2})}$

$\times\dfrac{(6^2+6+\frac{1}{2})(8^2-8+\frac{1}{2})(8^2+8+\frac{1}{2})(10^2-10+\frac{1}{2})(10^2+10+\frac{1}{2})}{(5^2+5+\frac{1}{2})(7^2-7+\frac{1}{2})(7^2+7+\frac{1}{2})(9^2-9+\frac{1}{2})(9^2+9+\frac{1}{2})}$

$= \dfrac{(2+\frac{1}{2})(6+\frac{1}{2})(12+\frac{1}{2})(20+\frac{1}{2})(30+\frac{1}{2})}{(0+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})(6+\frac{1}{2})(12+\frac{1}{2})(20+\frac{1}{2})}$

$\times\dfrac{(42+\frac{1}{2})(56+\frac{1}{2})(72+\frac{1}{2})(90+\frac{1}{2})(110+\frac{1}{2})}{(30+\frac{1}{2})(42+\frac{1}{2})(56+\frac{1}{2})(72+\frac{1}{2})(90+\frac{1}{2})}$

$= \dfrac{110+\frac{1}{2}}{0+\frac{1}{2}} = 221$。

淺問

1. 觀察數列的規律：$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\ldots$ 求該數列第 100 項。
（中國重慶市初中數學競賽 2003）

2. 若 $f(x)=\frac{25^x}{25^x+5}$ 及 $Q=f(\frac{1}{25})+f(\frac{2}{25})+f(\frac{3}{25})+\ldots+f(\frac{24}{25})$，求 Q 的值。（HKMO 2011/12 決賽個人）

3. 求下列數列的總和：
   (a) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{999\times 1000}$
   (b) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{998\times 1000}$
   (c) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+1000}$

4. 求 $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\ldots+(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{9}{10})$ 的值。
（HKMO 1994/05 初賽團體）

5. 求下列數列的乘積：
   (a) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2000})$
   (b) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\ldots(1-\frac{1}{2000^2})$

6. 計算 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2009})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2008})$
$-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2008})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2009})$ 的值。（HKMHASC 2008/09）

7. 若 $0.\dot{1}+0.0\dot{2}+0.00\dot{3}+\ldots+0.00000000\dot{9}=a$，求 a 的值。
（答案以小數表示）（HKMO 1997/98 決賽團體）

8. 計算 $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$。（AIME 1987）

詳答

1. 以 2 為分母的分數有 1 個，以 3 為分母的分數有 2 個，
如此類推，以 n 為分母的分數有 $n-1$ 個。

共有分數 $1+2+3+...+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \le 100$。

即 $n^2-2n-200 \le 0$

$$n \le \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4(1)(-200)}}{2(1)}$$ （負值捨去）

$$= \frac{2+\sqrt{804}}{2}$$

當中 $28<\sqrt{804}<29$，即 $n<\frac{2+28}{2}<15$。

取 $n=14$，得 $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{14\times 13}{2} = 91$。

即第 100 項為以 15 為分母的分數中的第 9 個，即 $\frac{9}{15}$。

（註：此題分數不應約簡，以妨混淆不清。）

2. $$f(\frac{a}{25})+f(1-\frac{a}{25}) = \frac{25^{\frac{a}{25}}}{25^{\frac{a}{25}}+5}+\frac{25^{1-\frac{a}{25}}}{25^{1-\frac{a}{25}}+5}$$

$$= \frac{25^{\frac{a}{25}}}{25^{\frac{a}{25}}+5}+\frac{25\times 25^{-\frac{a}{25}}}{25\times 25^{-\frac{a}{25}}+5}$$

$$= \frac{25^{\frac{a}{25}}}{25^{\frac{a}{25}}+5}+\frac{25}{25+5\times 25^{\frac{a}{25}}}$$

$$= \frac{25^{\frac{a}{25}}}{25^{\frac{a}{25}}+5}+\frac{5}{5+25^{\frac{a}{25}}} = 1$$

所以 Q

$$= [f(\frac{1}{25})+f(\frac{24}{25})]+[f(\frac{2}{25})+f(\frac{23}{25})]+...+[f(\frac{12}{25})+f(\frac{13}{25})]$$

$$= 12\times 1 = 12$$

3. (a) $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{999\times 1000}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000})$$

$$=1-\frac{1}{1000} \quad = \frac{999}{1000}$$

(b) $$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{998\times 1000}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{998}-\frac{1}{1000})$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{999}-\frac{1}{1000})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{999000+499500-1000-999}{999000} \quad = \frac{1496501}{1998000}$$

(c) $$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+1000}$$

$$=\frac{2}{1\times 2}+\frac{2}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 4}+...+\frac{2}{1000\times 1001}$$

$$=2\times\left[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001})\right]$$

$$=2\times\left[1-\frac{1}{1001}\right] \quad = 2\times\frac{1000}{1001} \quad = \frac{2000}{1001}$$

4 $$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+...+(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+...+\frac{9}{10})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}+\frac{1+2+3}{4}+...+\frac{1+2+3+...+9}{10}$$

$$=\frac{1(1+1)}{2\times 2}+\frac{2(2+1)}{2\times 3}+\frac{3(3+1)}{2\times 4}+...+\frac{9(9+1)}{2\times 10}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+...+\frac{9}{2} \quad = \frac{9(9+1)}{2\times 2}$$

$$=\frac{90}{4} \quad = \frac{45}{2}$$

5. (a) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})...(1-\frac{1}{2000})$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times...\times\frac{1999}{2000} = \frac{1}{2000}$

(b) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})...(1-\frac{1}{2000^2})$

$= (\frac{2^2-1}{2^2})(\frac{3^2-1}{3^2})(\frac{4^2-1}{4^2})...(\frac{2000^2-1}{2000^2})$

$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}$

$\times...\times\frac{(2000-1)(2000+1)}{2000^2}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times...\times\frac{1999}{2000}\times\frac{2001}{2000} = \frac{2001}{4000}$

6. 設 $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2008}$ 、 $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2009}$ ，故原式可化簡為

$AB-(A-1)(B+1) = AB-AB+B-A+1$

$= B-A+1 = \frac{1}{2009}$ 。

7. a $= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{9}\times\frac{1}{100}+...+\frac{9}{9}\times\frac{1}{10^8}$

$= \frac{10^8+2\times10^7+3\times10^6+...+9}{9\times10^8}$

$= \frac{123456789}{9\times10^8} = \frac{13717421}{10^8} = 0.13717421$

8. 分析 $x^4+324 = x^4+36x^2+324-36x^2$

$= (x^2+18)^2-(6x)^2$

$= (x^2-6x+18)(x^2+6x+18)$

$= [(x-3)^2+9][(x+3)^2+9]$

故原式

$= \frac{(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)(25^2+9)(31^2+9)(37^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)(25^2+9)(31^2+9)}$

$\times\frac{(43^2+9)(49^2+9)(55^2+9)(61^2+9)}{(37^2+9)(43^2+9)(49^2+9)(55^2+9)}$

$= \frac{61^2+9}{1^2+9} = \frac{3730}{10} = 373$ 。