「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

解幾 － 點與直線

摘要

1. 直線方程：

   $Ax+By+C=0$ 或 $y=mx+c$

   式中斜率為 m 或 $-\dfrac{A}{B}$，y 軸截距為 c 或 $-\dfrac{C}{B}$。

2. 兩點距離、斜率、傾角計算：

   若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 則

   (a) $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

   (b) $m_{AB}=\tan\theta=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

3. 認識兩直線平行、垂直及重疊的條件：

   設兩直線為 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 、 $A_2x+B_2y+C_2=0$

   (a) 兩直線平行不重疊的條件為斜率相等，但 y 軸截距不相等或

   $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$

   (b) 兩直線重疊的條件為斜率相等，且 y 軸截距相等或

   $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

   (c) 兩直線垂直的條件為斜率乘積為 -1 或

   $A_1A_2+B_1B_2=0$

4. 兩直線交點坐標的計算。

5. 分點公式的運用：

   若 $R(x,y)$ 在 AB 上且有 $\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{r}{s}$，則

   $x=\dfrac{sx_1+rx_2}{s+r},y=\dfrac{sy_1+ry_2}{s+r}$

拾例

1. 設 P 點在 y 軸上，且使 P 點到 $A(-1,9)$ 及 $B(6,-1)$ 的距離相等。求 P 點的坐標。

答： 設 $P(0,y)$，

$$\begin{aligned}
(0+1)^2+(y-9)^2 &= (0-6)^2+(y+1)^2 \\
1+y^2-18y+81 &= 36+y^2+2y+1 \\
20y &= 45 \\
y &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

所以 $P(0,\frac{9}{4})$。

2. 在坐標平面上，若 x 軸、y 軸與直線 $3x+16y=12$ 所圍成的三角形的面積是 b 平方單位，求 b 的值。（HKMO 2008/09 決賽個人）

答： $3x+16y=12$ 的 x 軸截距為 $\frac{12}{3}=4$，y 軸截距為 $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$。

所以 $b = \frac{1}{2}(4)(\frac{3}{4}) = \frac{3}{2}$。

3. 求直線 $3x-4y-12=0$ 的傾角的角平分線所在的直線的方程。

答： 原直線與 x 軸相交於（4, 0）

設原直線的傾角為 $2a$，則 $\tan 2a=\frac{3}{4}$。

$$\begin{aligned}
\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} &= \frac{3}{4} \\
3\tan^2 a+8\tan a-3 &= 0 \\
(3\tan a-1)(\tan a+3) &= 0
\end{aligned}$$

$\tan a=\frac{1}{3}$ 或 $\tan a=-3$（捨去）

所以角平分線所在的直線的方程為

$$\begin{aligned}
\frac{y-0}{x-4} &= \frac{1}{3} \\
x-3y-4 &= 0
\end{aligned}$$

4. 已知 $A(6,4), B(-5,-1)$。設 C 內分 AB 3:2 及 D 外分 AB 3:2，求 C, D 坐標。

答： C = $\left(\frac{6\times2+(-5)\times3}{2+3}, \frac{4\times2+(-1)\times3}{2+3}\right)$ = $(-\frac{3}{5}, 1)$

D = $\left(\frac{6\times2-(-5)\times3}{2-3}, \frac{4\times2-(-1)\times3}{2-3}\right)$ = $(-27,-11)$。

5. (a) 若方程 $2x+3y=5$ 及 $3x+ay=5$ 表示一對平行的直線，求 a 的值。

(b) 若方程 $2x+3y=5$ 及 $3x+by=5$ 表示一對垂直的直線，求 b 的值。

答： (a) 由於兩直線平行，所以 $\frac{a}{3}=\frac{3}{2}$，即 $a=\frac{3\times3}{2}=\frac{9}{2}$。

(b) 由於兩直線平行，所以 $(-\frac{2}{3})\times(-\frac{3}{b})=-1$，即 $b=\frac{2}{-1}=-2$。

6. 設 ABCD 為平行四邊形，其中三頂點 A, B, C 的坐標分別為 (-1,0)、(3,1)、(0,4)，求頂點 D 的坐標。

答： 設 $D(x,y)$，

由於平行四邊形對角線互相平分，故設兩對角線交點為 M。

M = $\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ = $(-\frac{1}{2}, 2)$

另 $\frac{x+3}{2}=\frac{-1}{2}$，得 $x=-4$； $\frac{y+1}{2}=\frac{3}{2}$，得 $y=2$，

所以 $D(-4,2)$。

7. 已知三點 A(1, 3), B(4, 9) 及 C(2, D) 共線，求 D。
(HKMO 1986/87 決賽團體)

答： 由於三點共線，所以

$$m_{AB} = m_{BC}$$

$$\frac{9-3}{4-1} = \frac{D-9}{4-2}$$

$$-2 = \frac{D-9}{2}$$

$$-4 = D-9$$

$$D = 5$$

8. 如果下列三條直線相交於一點，求 c 的值。

$L_1:6x+6y-19=0$， $L_2:18x+12y+c=0$， $L_3:2x+3y-8=0$

答： 解 $\begin{cases}6x+6y-19=0\\2x+3y-8=0\end{cases}$，得交點坐標為 $(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$。

代 $(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$ 入 L_2，得 $c=-18(\frac{3}{2})-12(\frac{5}{3})=-47$。

9. 求以 $A(1,7)$、$B(-7,1)$ 為端點的垂直平分線方程。

答： 解法一：

AB 的中點為 $(\frac{1-7}{2},\frac{7+1}{2})=(-3,4)$。

AB 的斜率為 $\frac{1-7}{-7-1}=\frac{3}{4}$。

所以垂直平分線的方程為

$$\frac{y-4}{x+3}=-1\div\frac{3}{4}$$

$$\frac{y-4}{x+3}=-\frac{4}{3}$$

$$4x+3y=0$$

解法二：

設 $P(x,y)$ 為垂直平分線的一點，

則 PA = PB

$$(x-1)^2+(y-7)^2=(x+7)^2+(y-1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-14y+49=x^2+14x+49+y^2-2y+1$$

$$4x+3y=0$$

10. 若某常數 k 使 $x^2-4y^2+6x-4y+k=0$ 表示兩直線，求該兩直線交點的坐標。

答： 設 $x^2-4y^2+6x-4y+k=(x+2y+a)(x-2y+b)$，

比較系數得：$\begin{cases}a+b=6\\-2a+2b=-4\\ab=k\end{cases}$，解聯立方程得 $a=4,b=2$，

即 $k=(4)(2)=8$。

所以 $x^2-4y^2+6x-4y+8=(x+2y+4)(x-2y+2)$。

即兩直線為 $x+y-3=0$ 及 $x-y+1=0$，

故所求交點為 $\begin{cases}x+2y+4=0\\x-2y+2=0\end{cases}$，

解得 $x=-3,y=-\frac{1}{2}$，故交點坐標為 $(-3,-\frac{1}{2})$。

淺問

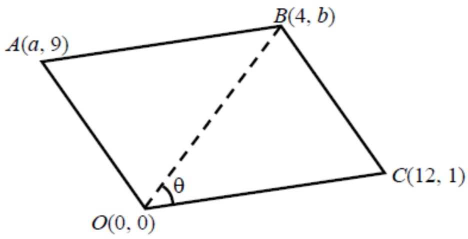
1. 已知三點 A(−8, 6) 、 B(−2, 1) 及 $C(4,c)$ 共線，求 c。
(HKMO 1988/89 初賽個人)

2. 設 P 點在 y 軸上，且使 P 點到 $A(-2,4)$ 及 $B(5,-3)$ 的距離相等。求 P 點的坐標。

3. 若點 Q 與 P(0, 1)、 R(7, 2) 及 x 軸等距離，求點 Q 的坐標。

4. 對於任何數值 m ，直線 $y=mx+2m+2$ 必經過一點 P。求 P 點坐標。
(HKMO 1995/96 初賽個人)

5. 求直線 $x+4y-2=0$ 與兩條坐標軸所圍成的三角形面積。(HKMO 1998/99 初賽團體)



6. 右圖中，已知 OABC 為一平行四邊形。
(a) 求 a。 (b) 求 b。
(c) 求 OABC 的面積。 (d) 求 $\tan\theta$
(HKMO 1991/92 決賽團體)

7. A, B, C, D 三點的坐標依次是 (10, 1), (1, 7), (−2, 1) 及 (1, 3)。AB 與 CD 相交於 P。求 $\frac{AP}{PB}$ 的值。(HKMO 1989/90 初賽團體)

8. 已知直線 $l_1: x+(a-1)y+(a^2-1)=0$ 及 直線 $l_2: ax+2y+6=0$，依下列條件，求 a 的值。
(a) $l_1 // l_2$ (b) $l_1 \perp l_2$

9. 若直線 $(2a^2-5a+2)x+(a^2-4)y+3a^2=0$ 與 x 軸平行，求 a 的值。

10. 已知三點 (4, −2), (1, −3), (2, 1) 是三角形三條邊的中點，求該三角形的三個頂點的坐標。

11. 求下列二次方程所代表的兩直線的交點坐標：
(a) $x^2-xy-6y^2+x+22y-20=0$
(b) $4x^2-9y^2-8x-36y-32=0$

詳答

1. 因 AB 的斜率與 BC 的斜率相等，

$$\frac{6-1}{-8+2} = \frac{c-1}{4+2}$$

$$\frac{5}{-6} = \frac{c-1}{6}$$

$$c-1 = -5$$

$$c = -4$$

註： 此題解法眾多，以距離、方程、分點亦可。

2. 答： 設 $P(0,y)$，

$$(0+2)^2+(y-4)^2 = (0-5)^2+(y+3)^2$$

$$4+y^2-8y+16 = 25+y^2+6y+9$$

$$14y = -14$$

$$y = -1$$

所以 $P(0,-1)$。

3. 設 $Q(x,y)$，則 $x^2+(y-1)^2 = (x-7)^2+(y-2)^2 = |y|^2$

$$x^2+(y-1)^2 = (x-7)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2-14x-4y+53$$

$$y = 26-7x \quad \cdots \quad (1)$$

$$x^2+(y-1)^2 = y^2$$

$$x^2+y^2-2y+1 = y^2$$

$$x^2-2y+1 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

代（1）入（2），

$$x^2-2(26-7x)+1 = 0$$

$$x^2+14x-51 = 0$$

$$(x+17)(x-3) = 0$$

解得 $Q(3,5)$ 或 $Q(-17,145)$。

4. 令 $m=0$，得直線 $y=2$；

令 $m=1$，得直線 $y=x+4$；

解二式得 $x=-2, y=2$，故 P 坐標為（-2, 2）。

5. 代 $x=0$ 入 $x+4y-2=0$，得 $y=\frac{1}{2}$，即該直線的 y 軸截距為 $\frac{1}{2}$；
代 $y=0$ 入 $x+4y-2=0$，得 $x=2$，即該直線的 x 軸截距為 2；
故三角形面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。

6. (a) OC 的 x 坐標相差 12，所以 AB 亦是。 $a=4-12=-8$。
(b) OA 的 y 坐標相差 9，所以 BC 亦是。 $b=1+9=10$。
(c) OA $= \sqrt{(9-0)^2+(-8-0)^2} = \sqrt{145}$

OA 的方程為 $\frac{y}{x}=\frac{-8}{9}$，$8x+9y=0$。

B 至 OA 的距離 $= \left|\frac{8(10)+9(4)}{\sqrt{8^2+9^2}}\right| = \frac{116}{\sqrt{145}}$

所以平行四邊形面積

$= \sqrt{145}\times\frac{116}{\sqrt{145}} = 116$

(d) OB $= \sqrt{(4-0)^2+(10-0)^2} = \sqrt{116}$

OC $= \sqrt{(12-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{145}$

面積 $= OB\times OC\times\sin\theta = \sqrt{116}\times\sqrt{145}\sin\theta$

116 $= \sqrt{116}\times\sqrt{145}\sin\theta$

$\sin\theta = \sqrt{\frac{116}{145}}$

$\cos\theta = \sqrt{1-(\sqrt{\frac{116}{145}})^2} = \sqrt{\frac{29}{145}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \sqrt{\frac{116}{145}}\times\sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$

（註：亦可求 OC 和 OB 的斜率，再計算兩線夾角。）

7. AB 的方程：

$$\begin{aligned}\frac{y-7}{x-1} &= \frac{1-7}{10-1}\\ \frac{y-7}{x-1} &= \frac{-2}{3}\\ 3(y-7) &= -2(x-1)\\ 3y-21 &= -2x+2\\ 2x+3y-23 &= 0 \quad \ldots(1)\end{aligned}$$

CD 的方程：

$$\begin{aligned}\frac{y-3}{x-1} &= \frac{1-3}{-2-1}\\ \frac{y-3}{x-1} &= \frac{2}{3}\\ 3(y-3) &= 2(x-1)\\ 3y-9 &= 2x-2\\ 2x-3y+7 &= 0 \quad \ldots(2)\end{aligned}$$

解（1),（2)，得 P(4,5)。即 $\frac{AP}{PB} = \frac{10-4}{4-1} = 2$。

8. $l_1 : y = \frac{x}{1-a} - (a+1)$，$l_2 : y = -\frac{a}{2}x - 3$，所以兩線的斜率分別為 $\frac{1}{1-a}, -\frac{a}{2}$。

(a) 當 $a=1$ 時，兩線不平行。

當 $a \neq 1$ 時，$\frac{1}{1-a} = -\frac{a}{2}$，

即 $a^2 - a - 2 = 0$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$（捨去)。

(b) 當 $a=1$ 時，兩線不垂直。

當 $a \neq 1$ 時，$\frac{1}{1-a} \times (-\frac{a}{2}) = -1$，即 $a = 2-2a$，解得 $a = \frac{2}{3}$

9. 即 $\begin{cases} 2a^2 - 5a + 2 = 0 \\ a^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} a = 2, \frac{1}{2} \\ a \neq \pm 2 \end{cases}$， 所以得 $a = \frac{1}{2}$。

10. 設該三角形的三頂點分別為 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$，

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=4\\ \dfrac{x_2+x_3}{2}=1\\ \dfrac{x_3+x_1}{2}=2\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=-2\\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=-3\\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=1\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x_1+x_2=8\\ x_2+x_3=2\\ x_3+x_1=4\end{cases}$ 及 $\begin{cases}y_1+y_2=-4\\ y_2+y_3=-6\\ y_3+y_1=2\end{cases}$

把兩組三式各相加，得

$x_1+x_2+x_3=7$ 及 $y_1+y_2+y_3=-4$

解得 $x_1=5, x_2=3, x_3=-1$ 及 $y_1=2, y_2=-6, y_3=0$

所以該三角形的三個頂點坐標為 (5, 2), (3, -6), (-1, 0)。

11. (a) 設 $x^2-xy-6y^2+x+22y-20 = (x+2y+a)(x-3y+b)$

比較系數，得 $\begin{cases}a+b=1\\ -3a+2b=22\\ ab=-20\end{cases}$，解得 $a=-4, b=5$。

所以 $x^2-xy-6y^2+x+22y-20=(x+2y-4)(x-3y+5)$

即兩直線為 $x+2y-4=0$ 及 $x-3y+5=0$。

$\begin{cases}x+2y-4=0\\ x-3y+5=0\end{cases}$，解得 $x=\dfrac{2}{5}, y=\dfrac{9}{5}$，即交點坐標為 $(\dfrac{2}{5},\dfrac{9}{5})$。

(b) 設 $4x^2-9y^2-8x-36y-32=0 = (2x-3y+a)(2x+3y+b)$

比較系數，得 $\begin{cases}a+b=-4\\ a-b=-12\\ ab=-32\end{cases}$，解得 $a=-8, b=4$。

所以 $4x^2-9y^2-8x-36y-32=(2x-3y-8)(2x+3y+4)$

即兩直線為 $2x-3y-8=0$ 及 $2x+3y+4=0$。

$\begin{cases}2x-3y-8=0\\ 2x+3y+4=0\end{cases}$，解得 $x=1, y=-2$，即交點坐標為 $(1,-2)$。