「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

解幾 － 圓的解析

摘要

1. 認識圓的方程。若圓心 $A(a,b)$ 及半徑 r，則圓方程為
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ 或 } x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$
其中 $a=-\frac{D}{2},b=-\frac{E}{2},r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 。
2. 利用三點坐標或三邊方程求該三角形的外接圓方程。
3. 切線方程：
   (a) 設 $P(x_0,y_0)$ 在圓上，過 P 點的切線方程為
   $$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2 \text{ 或}$$
   $$x_0x+y_0y+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F=0$$
   (b) 設 $P(x_0,y_0)$ 在圓外，且過 P 點的切線的切點為 R，則有
   $$PR=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2}=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F}$$
   (c) 利用重根條件計算給定斜率的切線方程。
4. 計算點圓距離：
設點與圓心距離為 d，圓半徑為 r。
最小距離為 $|r-d|$，最大距離為 $r+d$ 。
5. 計算線圓距離：
設線與圓心距離為 d，圓半徑為 r。
   (a) 若直線與圓沒有交點，
   則最小距離為 $d-r$，最大距離為 $r+d$ 。
   (b) 若直線與圓有交點，
   則最小距離為 0，最大距離為 $r+d$ 。

6. 判定兩圓公切線的數目：

若兩圓圓心距離為 d，則半徑為 r_1, r_2

(a) $d < |r_2 - r_1|$，外公切線 = 0，內公切線 = 0

(b) $d = |r_2 - r_1|$，外公切線 = 1，內公切線 = 0

(c) $|r_2 - r_1| < d < r_1 + r_2$，外公切線 = 2，內公切線 = 0

(d) $d = r_1 + r_2$，外公切線 = 2，內公切線 = 1

(e) $d > r_1 + r_2$，外公切線 = 2，內公切線 = 2

7. 運用軌跡法求圓的方程、半徑、圓心坐標。

8. 計算圓內最值問題。

拾例

1.　求以（9, −7）為圓心且與 y 軸相切的圓的方程。

答：　該圓半徑為 9，即方程為

$$
\begin{aligned}
(x-9)^2+(y+7)^2 &= 9^2 \\
x^2-18x+81+y^2+14y+49 &= 81 \\
x^2+y^2-18x+14y+49 &= 0
\end{aligned}
$$

。

2.　求以（1, 9）及（7, 4）為直徑兩端的圓的方程。

答：　解法一：

圓心在　$(\frac{1+7}{2},\frac{9+4}{2}) = (4,\frac{13}{2})$

半徑長　$\sqrt{(1-4)^2+(9-\frac{13}{2})^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

方程為

$$
\begin{aligned}
(x-4)^2+(y-\frac{13}{2})^2 &= \frac{61}{4} \\
x^2-8x+16+y^2-13y+\frac{169}{4} &= \frac{61}{4} \\
x^2+y^2-8x-13y+43 &= 0
\end{aligned}
$$

解法二：

設 $P(x,y)$ 在圓上，則由直徑兩端點與 P 連線互相垂直。

故

$$
\begin{aligned}
\frac{y-9}{x-1}\times\frac{y-4}{x-7} &= -1 \\
(y-9)(y-4) &= -(x-1)(x-7) \\
(x-1)(x-7)+(y-9)(y-4) &= 0 \\
x^2-8x+7+y^2-13y+36 &= 0 \\
x^2+y^2-8x-13y+43 &= 0
\end{aligned}
$$

3. 過點 P(−1, −1) 作圓 $C:(x-10)^2+(y-8)^2=25$ 的兩條切線，切點分別在 A, B 求過圓心 O、A、B 三點的圓的方程。

答： 定圓圓心在 (10, 8)。

由於 P、O、A、B 四點共圓，且以 PO 為直徑，

設 $M(x,y)$ 在圓上，則 $MP \perp MO$。

故
$$
\begin{aligned}
\frac{y+1}{x+1}\times\frac{y-8}{x-10} &= -1\\
(y+1)(y-8) &= -(x+1)(x-10)\\
(x+1)(x-10)+(y+1)(y-8) &= 0\\
x^2-9x-10+y^2-7y-8 &= 0\\
x^2+y^2-9x-7y-18 &= 0
\end{aligned}
$$

4. (a) 求圓 $x^2+y^2=9$ 上的點到圓外點 $(4,-1)$ 的距離的最小值。

(b) 求圓 $x^2+y^2=9$ 上的點到圓內點 $(1,-1)$ 的距離的最小值。

答： (a) 圓心在 (0, 0)，半徑為 3。

定點至圓心的距離 $= \sqrt{(4-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{17}$ 。

故距離的最小值為 $\sqrt{17}-3$ 。

(b) 圓心在 (0, 0)，半徑為 3。

定點至圓心的距離 $= \sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{2}$ 。

故距離的最小值為 $3-\sqrt{2}$ 。

5. 求圓 $C_1:x^2+y^2=9$ 上的點 A 及圓 $C_1:x^2+y^2-20x-30y+300=0$ 上的點 B 的距離的最大值。

答： C_1 的圓心在 (0, 0)，半徑為 3。

C_2：
$$
\begin{aligned}
x^2-20x+100+y^2-30y+225 &= 25\\
(x-10)^2+(y-15)^2 &= 5^2
\end{aligned}
$$

C_1 的圓心在 (10, 15)，半徑為 5。

故兩圓圓心距離 $= \sqrt{(10-0)^2+(15-0)^2} = \sqrt{325}$

$= 5\sqrt{13}$ 。

故 AB 距離的最大值 $= 5\sqrt{13}+3+5 = 8+5\sqrt{13}$ 。

6. A(3, −4) 在圓 $x^2+y^2=25$ 上，求在該點上的切線方程。

答： 圓心為原點，故圓心至切點的半徑斜率為 $\dfrac{-4-0}{3-0}=-\dfrac{4}{3}$ 。

由於半徑垂直於切線，故得切線方程為

$$\begin{aligned}\frac{y+4}{x-3} &= \frac{3}{4}\\ 4y+16 &= 3x-9\\ 3x-4y-25 &= 0\end{aligned}$$

7. 求從點 (7, 3) 向圓 $x^2+y^2=9$ 發的非水平切線方程。

答： 設切線方程為 $y=mx+c$ ，

即得 $7m+c=3$ 及

$$\begin{aligned}x^2+(mx+c)^2-9 &= 0\\ x^2+m^2x^2+2mcx+c^2-9 &= 0\\ (1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-9) &= 0\end{aligned}$$

由於切線關係，上式 $\Delta=0$ ，

$$\begin{aligned}(2mc)^2-4(1+m^2)(c^2-9) &= 0\\ 4m^2c^2-4c^2-4m^2c^2+36+36m^2 &= 0\\ 9m^2-c^2+9 &= 0\end{aligned}$$

代 $c=3-7m$ 入上式，得

$$\begin{aligned}9m^2-(3-7m)^2+9 &= 0\\ 9m^2-9+42m-49m^2+9 &= 0\\ 42m-40m^2 &= 0\\ 21m-20m^2 &\end{aligned}$$

解得 $m=0$ （捨去）或 $m=\dfrac{21}{20}$ 。

取 $m=\dfrac{21}{20}$ ，切線方程為

$$\begin{aligned}\frac{y-3}{x-7} &= \frac{21}{20}\\ 20y-60 &= 21x-147\\ 21x-20y-87 &= 0\text{。}\end{aligned}$$

8. 已知 P(6, 4)。 求 PQ 其中 PQ 為 與圓 $2x^2+2y^2=5$ 相切於 Q 的線段。

答： 圓方程即 $x^2+y^2-\dfrac{5}{2}=0$

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(6)^2+(4)^2-\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{99}{2}} = \frac{\sqrt{198}}{2}\\ &= \frac{3\sqrt{22}}{2}\text{。}\end{aligned}$$

9. 求圓 $C_1: x^2+y^2+2x+6y+9=0$ 及圓 $C_2: x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 的所有公切線的方程。

答： C_1：
$$x^2+2x+1+y^2+6y+9 = 1$$
$$(x+1)^2+(y+3)^2 = 1$$
故 C_1 的圓心 O_1 在（−1, −3），半徑 r_1 為 1。

C_1：
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = 9$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 9$$
故 C_1 的圓心 O_2 在（3, −1），半徑 r_1 為 3。

兩圓心距離 $= \sqrt{(3+1)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{20}$

半徑之和 $= 3+1 = 4$

由於兩圓心距離 > 半徑之和，故兩圓共有兩條外公切線和兩條內公切線。

外公切線的交點 M 為兩圓圓心連線的外分點，

即 $$\frac{O_1M}{MO_2} = -\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{3}$$
$$M\left(\frac{(-1)(3)+(3)(-1)}{3-1}, \frac{(-3)(3)+(-1)(-1)}{3-1}\right)$$
$$= M(-3,-4)$$

設外公切線斜為 k

則 $$\frac{y+4}{x+3} = k$$
$$kx-y+(3k-4) = 0$$

由 O_1 至外公切線的距離為 1，

所以 $$\left|\frac{k(-1)-(-3)+3k-4}{\sqrt{1+k^2}}\right| = 1$$
$$2k-1 = \pm\sqrt{1+k^2}$$
$$4k^2-4k+1 = 1+k^2$$
$$3k^2-4k = 0$$

解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$

即外公切線為 $(0)x-y+(3\times 0-4)=0$， 即 $y+4=0$。

或 $(\frac{4}{3})x-y+(3\times\frac{4}{3}-4)=0$， 即 $4x-3y=0$。

9.（續）

內公切線的交點 N 為兩圓圓心連線的內分點，

即 $\dfrac{O_1N}{NO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{3}$

$$N(\frac{(-1)(3)+(3)(1)}{3+1},\frac{(-3)(3)+(-1)(1)}{3+1})$$

$$= N(0,-\frac{5}{2})$$

設內公切線斜為 k

則 $\dfrac{y+\frac{5}{2}}{x-0} = k$

$\dfrac{2y+5}{2x} = k$

$2kx-2y-5 = 0$

由 O_2 至外公切線的距離為 3，

所以 $\left|\dfrac{2k(3)-2(-1)-5}{\sqrt{2^2+(2k)^2}}\right| = 3$

$6k-3 = \pm 3\sqrt{4+4k^2}$

$36k^2-36k+9 = 36+36k^2$

$36k+27 = 0$

解得 $k=-\dfrac{3}{4}$。

即內公切線為 $2(-\dfrac{3}{4})x-2y-5$， 即 $3x+4y+10=0$。

另一內公切線的斜率為無定義，即該公切線為 $x=0$。

10. 設 P 為定圓 $x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 上任意一點，O 為原點。在 PO 的延線上取 Q 點，使 PO:OQ = 2:1，求 Q 點的軌跡方程。

答： 定圓：

$$x^2+4x+4+y^2+6y+9 = 1$$
$$(x+2)^2+(y+3)^2 = 1$$

定圓圓心在 (2, 3)，半徑為 = 1。

這是以原點作消失點，按反向 $\frac{1}{2}$ 縮小。

所以 Q 的軌跡方程的圖像亦是圓。

是故新圓心在 $(2\times(-\frac{1}{2}),3\times(-\frac{1}{2})) = (-1,-\frac{3}{2})$，

新半徑在 $= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。

故點 Q 的軌跡方程為

$$(x+1)^2+(y+\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$$
$$x^2+2x+1+y^2+3y+\frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+2x+3y+2 = 0$$

數學家是一個在黑暗房間找尋不存在的黑貓的盲人。

英國自然學家
達爾文 (1809-1882)

淺問

1. 求下列圓的圓心和半徑：
   (a) $x^2+y^2-49=0$ (b) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

2. 求以（4,23）為圓心且與 y 軸相切的圓的方程。

3. 求過 A(1, -1)、 B(-1, 1) 且圓心在 $x+y-2=0$ 上的圓的方程。

4. 求以（-1,-4）及（5,2）為直徑兩端點的圓的方程。

5. 求過點（4,3),（5,2),（1,0）的圓的方程。

6. 求圓心為（1,2）且與直線 $5x-12y-7=0$ 相切的圓的方程。

7. 已知 $y=2x+c$ 為圓 $x^2+y^2=5$ 的切線，求 c 的值。

8. 求下列情況下，從圓外點 P 點引至圓 C 的切線長：
   (a) P(0,7) $C:(x+3)^2+(y-2)^2=9$
   (b) P(-1,-2) $C:2x^2+2y^2-3x-4y-5=0$

9. 從 P(a, 3) 向圓 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$ 作切線，求切線長的最小值。

10. 求下列兩圓的公切線數目：
    (a) $C_1:x^2+y^2-25=0$、$C_2:x^2+y^2-14x+40=0$
    (b) $C_1:x^2+y^2-64=0$、$C_2:x^2+y^2-6y-16=0$

11. 已知圓 $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ 的一條直徑通過直線 $x-2y-3=0$ 被圓所截弦的中點，求該直徑的直線方程。

12. 已知實數 x,y 滿足 $x^2+y^2-2x+4y-20=0$，求 x^2+y^2 的最小值。

13. Q 為圓 $x^2-10x+y^2+6y+29=0$ 上的一點使其與 P(-1,-6) 的距離最遠。求 P、Q 兩點的距離。（FWMT-S 2003）

14. 點 P 在圓 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 上，點 Q 在圓 $x^2+y^2+6x-2y+9=0$ 上。設兩點的距離的最大值為 a 和最小值為 b，求 ab 的值。

詳答

1. (a) $x^2+y^2-49=0$

$(x-0)^2+(y-0)^2=7^2$

所以 圓心在 (0, 0) 半徑 = 7。

(b) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$

所以 圓心在 (2, 3) 半徑 = 5。

2. 圓與 y 軸相切，即半徑 = 4。

故圓的方程為

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y-23)^2 &= 4^2\\ x^2-8x+16+y^2-46y+529 &= 16\\ x^2+y^2-8x-46y+529 &= 0\end{aligned}$$

3. 設圓心在 (a, b)，

$\begin{cases} a+b-2=0 \\ (a-1)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b-1)^2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a+b-2=0 \\ a=b \end{cases}$，

故得 $a=b=1$。

半徑為 $\sqrt{(1-1)^2+(1+1)^2} = 2$

所以該圓方程為 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$，即 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$。

4. 解法一：

圓心在 $(\frac{-1+5}{2},\frac{-4+2}{2}) = (2, -1)$

半徑長 $\sqrt{(2+1)^2+(-1+4)^2} = \sqrt{18}$

方程為

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y+1)^2 &= 18\\ x^2-4x+4+y^2+2y+1 &= 18\\ x^2+y^2-4x+2y-13 &= 0\end{aligned}$$

解法二：

設 $P(x,y)$ 在圓上，則由直徑兩端點與 P 連線互相垂直。

故

$$\begin{aligned}\frac{y+4}{x+1}\times\frac{y-2}{x-5} &= -1\\ (y+4)(y-2) &= -(x+1)(x-5)\\ (x+1)(x-5)+(y+4)(y-2) &= 0\\ x^2-4x-5+y^2+2y-8 &= 0\\ x^2+y^2-4x+2y-13 &= 0\end{aligned}$$

5. 設該圓方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，則有

$$\begin{cases}16+9+4D+3E+F=0\\25+4+5D+2E+F=0\\1+D+F=0\end{cases}，$$

兩式相減得 $\begin{cases}4+D-E=0\\14+2D+E=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-6\\E=-2\end{cases}$，代入後得 $F=5$。

6. 圓的半徑 $= \left|\dfrac{5(1)-12(2)-7}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = 2$

所以該圓方程為 $(x-1)^2+(y-2)^2 = 2^2$

$x^2+y^2-2x-4y+1 = 0$

7. 解法一：

$x^2+y^2=5$

圓心為（0, 0），半徑 = $\sqrt{5}$

圓心至直線的距離為 $\left|\dfrac{2(0)-(0)+c}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \sqrt{5}$

$c = \pm 5$

解法二：

代直線入圓，得 $x^2+(2x+c)^2-5 = 0$

$x^2+4x^2+4cx+c^2-5 = 0$

$5x^2+4cx+(c^2-5) = 0$

由於相切，只有一交點，即上式的 $\Delta=0$

$(4c)^2-4(5)(c^2-5) = 0$

$16c^2-20c^2+100 = 0$

$4c^2 = 100$

$C = \pm 5$

8. (a) 切線長 $= \sqrt{(0+3)^2+(7-2)^2-9}$

$= \sqrt{25} = 5$。

(b) 圓方程可改寫成 $x^2+y^2-\dfrac{3}{2}x-2y-\dfrac{5}{2}=0$

切線長 $= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2-\dfrac{3}{2}(-1)-2(-2)-\dfrac{5}{2}}$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$。

9. 切線長 $\sqrt{(a+2)^2+(3+2)^2-1} = \sqrt{(a+2)^2+24}$

故切線長的最小值 $= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

10. (a) $C_1: x^2+y^2-25=0$ $(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$

圓心在（0, 0），半徑為 5。

$C_2: x^2+y^2-14x+40=0$ $(x-7)^2+(y-0)^2=3^2$

圓心在（7, 0），半徑為 3。

兩圓心距離 $= \sqrt{(7-0)^2+(0-0)^2} = 7$

半徑之和 = 5 + 3 = 8

半徑之差 = 5 - 3 = 2

由於半徑之差 < 兩圓心距離 < 半徑之和，故公切線數目 為 2。

(b) $C_1: x^2+y^2-64=0$ $(x-0)^2+(y-0)^2=8^2$

圓心在（0, 0），半徑為 8。

$C_2: x^2+y^2-6y-16=0$ $(x-0)^2+(y-3)^2=5^2$

圓心在（0, 3），半徑為 5。

兩圓心距離 $= \sqrt{(0-0)^2+(0-3)^2} = 3$

半徑之和 = 8 + 5 = 13

半徑之差 = 8 - 5 = 3

由於半徑之差 = 兩圓心距離，故公切線數目 為 1。

11. 圓心在（2, -1）。

因直徑垂直於弦，所以直線方程為 $2x+y+c=0$，代圓心入直線方程得 $2(2)+(-1)+c=0$，$c=-3$。所以直徑方程為 $2x+y-3=0$。

所以該圓方程為 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$。

12. $x^2+y^2-2x+4y-20 = 0$

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4) = 20+1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2 = 5^2$

所以該方程為一以（1, -2）作圓心，半徑為 5 的圓形。

由於原點至圓心距離 $= \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5} < 5$

所以原點在圓內，而原點至圓的最小距離為 $5-\sqrt{5}$，

所以 x^2+y^2 的最小值為 $(5-\sqrt{5})^2 = 25-10\sqrt{5}+5$

$= 30-10\sqrt{5}$

13. $x^2-10x+y^2+6y+29=0$，即 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$

故圓心在（5, −3），半徑為 $\sqrt{5}$。

P 與圓心距離 $\sqrt{(5+1)^2+(-3+6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$。

故 P 在圓外， 且 PQ $= 3\sqrt{5}+\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$。

14. $x^2+y^2-2x+4y+1 = 0$

$(x-1)^2+(y+2)^2 = 2^2$

此圓的圓心為（1, −2），半徑為 2。

$x^2+y^2+6x-2y+9 = 0$

$(x+3)^2+(y-1)^2 = 1$

此圓的圓心為（−3, 1），半徑為 1。

兩圓心距離 $= \sqrt{(1+3)^2+(-2-1)^2} = 5$

即此兩圓相分離，

故兩點距離的最大值 a $= 5+2+1 = 8$

故兩點距離的最小值 b $= 5-2-1 = 2$

所以 $ab = 8\times 2 = 16$。

A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there.

Charles Darwin (1809-1882)