「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

解幾 － 圓錐曲線

摘要

1.　定義標準橢圓為以原點為中心、長短軸在兩軸的橢圓。
認識其方程、長軸、短軸、焦點、通徑的意義和計算：

(a)　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）：
即長軸在 x 軸長 2a，短軸在 y 軸長 2b，
焦點坐標 $(\pm c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，通徑 $=\frac{2b^2}{a}$。

(b)　$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$：
即長軸在 y 軸長 2a，短軸在 x 軸長 2b，
焦點坐標 $(0,\pm c)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，通徑 $=\frac{2b^2}{a}$。

2.　認識橢圓切線計算：

(a)　計算標準橢圓上點 (x_0,y_0) 的切線方程。
$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 或 $\frac{x_0x}{b^2}+\frac{y_0y}{a^2}=1$。

(b)　利用重根條件計算給定斜率的切線方程。

3. 定義標準雙曲線為以原點為中心、實虛軸在兩軸的雙曲線。
認識其方程、實軸、虛軸、焦點、通徑、漸近線的意義和計算：

(a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）

即實軸在 x 軸長 2a，虛軸在 y 軸長 2b，

焦點在 $(\pm c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，通徑 = $\frac{2b^2}{a}$。

漸近線方程為 $y=\pm\frac{b}{a}x$。

(b) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）

即實軸在 y 軸長 2a，虛軸在 x 軸長 2b，

焦點在 $(0,\pm c)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，通徑 = $\frac{2b^2}{a}$。

漸近線方程為 $y=\pm\frac{a}{b}x$。

4. 認識雙曲線切線計算：

(a) 計算標準雙曲線上點 (x_0, y_0) 的切線方程。

$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 或 $\frac{x_0x}{b^2}-\frac{y_0y}{a^2}=1$。

(b) 利用重根條件計算給定斜率的切線方程。

5. 淺介圓錐曲線的分類和離心率（e）的計算和意義：

離心率 $e=\frac{c}{a}$，

對於圓 $e=0$； 橢圓 $0<e<1$；
拋物線 $e=1$； 雙曲線$1<e<\infty$。

6. 計算曲線交點、截距等。

7. 定義標準拋物線為以原點為頂點、對稱軸在兩軸的拋物線。
認識其方程、對稱軸、焦點、通徑的意義和計算：

(a) $y^2=4px$

即對稱軸在 x 軸，焦點在 $(p,0)$，通徑長$|4p|$。

(b) $x^2=4py$

即對稱軸在 y 軸，焦點在 $(0,p)$，通徑長$|4p|$。

8. 認識拋物線切線計算：

(a) 計算標準拋物線上點 (x_0, y_0) 的切線方程。

$y_0y=p(x+x_0)$ 或 $x_0x=p(y+y_0)$。

(b) 利用重根條件計算給定斜率的切線方程。

拾例

1. 已知橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$，求該橢圓的
   (a) 短軸長與長軸長之和。
   (b) 離心率。
   (c) 通徑長度。

答： (a) 短軸長 $= 2\sqrt{9} = 6$，
長軸長 $= 2\sqrt{25} = 10$，
所求總和 $= 6+10 = 16$。

(b) c $= \sqrt{5^2-3^2} = 4$，
所以離心率 $= \dfrac{4}{5}$。

(c) 通徑長 $= \dfrac{2(3)^2}{5} = \dfrac{18}{5}$。

2. 設橢圓以原點為中心，一個焦點在 $(0,\sqrt{2})$，長軸是短軸的 3 倍。求該橢圓的方程。

答： $\begin{cases} a=3b \\ a^2=b^2+2 \end{cases}$，解得 $b^2=\dfrac{1}{4}$，即 $a^2=\dfrac{3}{4}$。

所以該橢圓方程為 $\dfrac{x^2}{1/4}+\dfrac{y^2}{3/4}=1$，即 $12x^2+4y^2=3$。

3. 求點 P(0, 2)到橢圓 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的最大距離。

答： 設橢圓上有點 $Q(x,y)$

距離 $QP^2 = x^2+(y-2)^2 = 3(1-y^2)+(y-2)^2$
$= 2-3y^2+y^2-4y+4 = -2y^2-4y+6$
$= -2(y^2+2y)+6 = -2(y^2+2y+1)+6+2$
$= -2(y+1)^2+8$

由於 $-1\le y\le 1$，所以 QP^2 的最大值為 8，當 $y=-1$。
即最大距離為 $2\sqrt{2}$。

4. 求橢圓 $\frac{4x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ 在點（−6, −3）上的切線方程。

答： 切線方程為

$$\begin{aligned}\frac{4x(-6)}{225}+\frac{y(-3)}{25} &= 1\\ -24x-27y-225 &= 0\\ 8x+9y+75 &= 0\text{。}\end{aligned}$$

5. 已知雙曲線 $y^2-25x^2=25$，求該雙曲線的

(a) 焦點坐標。

(b) 兩軸長之積。

(c) 離心率。

答： (a) 雙曲線方程可改寫成 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{5}=1$。

所以焦點在 y 軸，且 $c=\sqrt{25+5}=\sqrt{30}$。

故焦點在 $(0,\pm\sqrt{30})$。

(b) 實軸長 $2\times\sqrt{25} = 10$，

虛軸長 $2\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$，

故兩軸長之積為 $10\times2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$。

(c) 離心率 $= \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$。

6. 雙曲線 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩漸近線夾角為 α，求 $\tan\alpha$ 的值。

答： a $= \sqrt{64} = 8$，

b $= \sqrt{16} = 4$。

漸近線方程為 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{8}x=\pm\frac{1}{2}x$，即傾角 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$。

$$\tan\alpha = \left|\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}\right| = \frac{4}{3}\text{。}$$

7. 求雙曲線 $3x^2-y^2=8$ 在 點（−2, 2）上的切線方程。

答： 切線方程

$$\begin{aligned}3x(-2)-y(2)-8 &= 0\\ -6x-2y-8 &= 0\\ 3x+y+4 &= 0\text{。}\end{aligned}$$

8. 求拋物線 $y^2=-23x$ 的通徑長度。

答： 即 $p=-\frac{23}{4}$，故通徑長 $\left|4\times(-\frac{23}{4})\right| = 23$。

9. 求與拋物線 $y^2=16x$ 切於點（4, −8）的直線方程。

答： 切線方程為 $-8y=16\times(\frac{x+4}{2})$，即 $x+y+4=0$。

10. 求與拋物線 $y^2=16x$ 相切且與 $y=3x+4$ 平行的切線方程。

答： 設切線方程為 $y=3x+c$。

代入拋物線，得

$$(3x+c)^2 = 16x$$
$$9x^2+(6c-16)x+c^2 = 0$$

因為切線，所以上式 $\Delta=0$，

$$(6c-16)^2-4(9)(c^2) = 0$$
$$4(3c-8)^2-36c^2 = 0$$
$$(3c-8)^2-9c^2 = 0$$
$$(3c-8-3c)(3c-8+3c) = 0$$
$$-8(6c-8) = 0$$
$$c = \frac{4}{3}$$

故切線方程為 $y=3x+\frac{4}{3}$，即 $9x-3y+4=0$。

生命因世界對它的要求而變得重要，

也因愛心對它的要求而變得有價值。

印度詩人、哲學家

泰戈爾

(Rabindranath Tagore 1861-1941)

淺問

1. 求下列橢圓的長軸、短軸、通徑長度和離心率，並求焦點坐標。

   (a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$　　(b) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{64}=1$

2. 求過 P(3, 0)、中心在原點且長軸長為短軸長三倍的橢圓方程。

3. 求與橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦點，且經過 $P(\sqrt{5},-\sqrt{6})$ 的橢圓方程。

4. 求在橢圓 $2x^2+3y^2=14$ 上的點（-1, 2）處引的切線方程。

5. 求下列雙曲線的實軸、虛軸、通徑長度和離心率，並求焦點坐標。

   (a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$　　(b) $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{36}=1$

6. 已知雙曲線 $kx^2-2ky^2+1=0$ 的一個焦點在（-4, 0），求實數 k。

7. 設下列雙曲線的兩條漸近線的交角為 θ，求 $\tan\theta$ 的值。

   (a) $4x^2-9y^2=36$　　(b) $x^2-25y^2=-25$

8. 求在雙曲線 $x^2-2y^2=14$ 上的點（4, -1）處引的切線方程。

9. 求下列拋物線的通徑長度、焦點坐標、準線方程。

   (a) $y^2=-6x$　　(b) $x^2=8y$

10. 求頂點在原點，x 軸為對稱軸，且經過點 A(9, 6) 的拋物線的方程。

11. 求拋物線 $y^2=16x$ 上的點到直線 $4x-3y+45=0$ 的距離的最小值。

12. 拋物線 $y^2=x$ 與直線 $y=x-2$ 有兩個交點，求過此兩交點的切線的交點坐標。

13. 由點（1, 0）引拋物線 $y=x^2+3$ 的兩條切線。若此兩切線的交角為 θ，求 $\tan\theta$ 的值。

詳答

1. (a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

即 $a=3,b=2$，故焦點在 y 軸上。

長軸長 $2\times3=6$，短軸長 $2\times2=4$，通徑長 $\dfrac{2(2)^2}{(3)}=\dfrac{8}{3}$。

$c=\pm\sqrt{3^2-2^2}=\pm\sqrt{5}$，故離心率 $=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，焦點在 $(0,\pm\sqrt{5})$。

(b) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{64}=1$

即 $a=9,b=8$，故焦點在 x 軸上。

長軸長 $2\times9=18$，短軸長 $2\times8=16$，通徑長 $\dfrac{2(8)^2}{(9)}=\dfrac{128}{9}$。

$c=\pm\sqrt{9^2-8^2}=\pm\sqrt{17}$，，故離心率 $=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$，焦點在 $(\pm\sqrt{17},0)$。

2. 若 P(3, 0) 是橢圓長軸上的一個端點，則 $a=3,b=1$，橢圓方程為

$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$；

若該點是短軸上的一個端點，則 $a=3,b=9$，橢橢圓方程為 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{81}=1$。

3. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$c^2=16-4=12$，故令橢圓方程為 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{m-12}=1$，其中 $m>12$。

代入 $P(\sqrt{5},-\sqrt{6})$，

$$\begin{aligned}
\frac{5}{m}+\frac{6}{m-12} &= 1\\
5(m-12)+6m &= m(m-12)\\
11m-60 &= m^2-12m\\
m^2-23m+60 &= 0\\
(m-3)(m-20) &= 0
\end{aligned}$$

$m=20$ 或 $m=3$（捨去）

故所求橢圓方程為 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{8}=1$。

4. 切線方程為 $2(-1)x+3(2)y=14$，即 $-2x+6y=14$，$x-3y+7=0$。

5. (a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$

即 $a=4,b=5$。

實軸長 $2\times 4=8$，虛軸長 $2\times 5=10$，通徑長 $\frac{2(5)^2}{(4)}=\frac{25}{2}$。

$c=\pm\sqrt{4^2+5^2}=\pm\sqrt{41}$，故離心率 = $\frac{\sqrt{41}}{4}$，焦點在 $(\pm\sqrt{41},0)$。

(b) $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{36}=1$

即 $a=7,b=6$。

實軸長 $2\times 7=14$，虛軸長 $2\times 6=12$，通徑長 $\frac{2(6)^2}{(7)}=\frac{72}{7}$。

$c=\pm\sqrt{7^2+6^2}=\pm\sqrt{85}$，故離心率 = $\frac{\sqrt{85}}{7}$，焦點在 $(0,\pm\sqrt{85})$。

6. 雙曲線： $2ky^2-kx^2=1$，

但由於焦點在 x 軸上，即 $\frac{x^2}{(-\frac{1}{k})}-\frac{y^2}{(-\frac{1}{2k})}=1$，其中 $k<0$。

$$c^2 = a^2+b^2 = -\frac{1}{k}-\frac{1}{2k} = 16$$

$$-\frac{3}{2k} = 16$$

$$k = -\frac{3}{32}$$

7. (a) 雙曲線方程可改寫成 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$。

即 $a=3,b=2$，所以漸近線方程為 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{2}{3}x$。

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})}{1+\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})}\right| = \left|\frac{4/3}{5/9}\right| = \frac{12}{5}$$ 。

(b) 雙曲線方程可改寫成 $y^2-\frac{x^2}{25}=1$。

即 $a=1,b=5$，所以漸近線方程為 $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{1}{5}x$。

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{5}-(-\frac{1}{5})}{1+\frac{1}{5}(-\frac{1}{5})}\right| = \left|\frac{2/5}{24/25}\right| = \frac{5}{12}$$ 。

8. 切線方程為 $4x-2(-1)y=14$，即 $2x+y-7=0$。

9. (a) $y^2=-6x$

即 $p=-\frac{3}{2}$，通徑長 $4\times\frac{3}{2}=6$，焦點在 $(-\frac{3}{2},0)$。

(b) $x^2=8y$

即 $p=2$，通徑長 $4\times2=8$，焦點在 (0, 2)。

10. 由於拋物線以 x 軸為對稱軸，且經過點 A(9, 6)，故拋物線在 y 軸的右方。
令拋物線的方程為 $y^2=4ax$，代入點 A(9, 6)，得

$$6^2 = 4a(9)$$
$$a = 1$$

所以拋物線的方程為 $y^2=4x$。

11. 抛物線上的點到直線的距離為

$$\left|\frac{4x-3y+45}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|\frac{y^2}{4}-3y+45\right|$$

$$= \frac{1}{20}(y-6)^2+\frac{36}{5}$$

所以當 $y=6$ 時得距離最小值 $\frac{36}{5}$。

12. $\begin{cases} y^2=x \\ y=x-2 \end{cases}$，消去 y ，得

$$\begin{aligned}(x-2)^2-x &= 0\\ x^2-4x+4-x &= 0\\ x^2-5x+4 &= 0\end{aligned}$$

解得 $x=1$ 或 $x=4$。

即兩交點坐標分別為（1, −1）及（4, 2）。

在點（1, −1），切線方程為 $-y=\frac{x+1}{2}$，即 $x+2y+1=0$。

在點（4, 2），切線方程為 $2y=\frac{x+4}{2}$，即 $x-4y+4=0$。

$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ x-4y+4=0 \end{cases}$，解得 $x=-2, y=\frac{1}{2}$。即交點坐標為 $(-2,\frac{1}{2})$。

13. 設切線方程為 $y=mx+c$。代（1, 0），得 $m+c=0$。

另

$$\begin{aligned}x^2+3 &= mx+c\\ x^2+3 &= mx-m\\ x^2-mx+(3+m) &= 0\end{aligned}$$

由於切線的因由，所以上式 $\Delta=0$，

$$\begin{aligned}(-m)^2-4(1)(3+m) &= 0\\ m^2-4m-12 &= 0\\ (m-6)(m+2) &= 0\end{aligned}$$

解得 $m=6$ 或 $m=-2$。

即 $\tan\theta = \left|\frac{6-(-2)}{1+6\times(-2)}\right| = \left|-\frac{8}{11}\right| = \frac{8}{11}$。