自1, 2, 3, 4, 5 以後

下一個數是……

周浩然 2011

是 6 嗎？

為什麼?

因為……

自然數?

Arithmetic progression?

等差數列？

Positive Integers?

正整數?

Natural Numbers?

只有 6 嗎？還有否別的呢？

12

- 1, 2, 3, 4, 5, 12, 21, 32, 45, 120, ……
- 「四階乘數」

階乘(Factorial)

- N! = N*(N-1)*(N-2)*…*1
- 例子：
- 10! = 10*9*8*7*6*5*4*3*2*1
  = 3628800
- 4! = 4*3*2*1 = 24
- 0! = 1

多階乘(Multifactorial) - 多幾個感嘆號？

- N!!≠ (N!)!
- N!!= N*(N-2)*(N-4)*…* 2或1
- N!!!= N*(N-3)*(N-6)*…* 3 或 2 或 1
- N!!!!= N*(N-4)*(N-8)*…* 4 或 3 或 2 或 1
- N!!!!! = ?

- 1!!!! = 1
- 2!!!! = 2
- 3!!!! = 3
- 4!!!! = 4
- 5!!!! = 5*1 = 5
- 6!!!! = 6*2 = 12
- 7!!!! = 7*3 = 21
- 8!!!! = 8*4 = 32 …

多階乘數中有否素數 (Prime)

- 在大於 1 的整數裡，除了 1 和自身以外沒有其他正因數的數稱為「素數」。
- 如 2, 3, 5, 7, 11, …, 2003, 2011, …
- 但看其 + 1 或 - 1
- 如 21480! - 1 或 26951! + 1 等

11

- 1, 2, 3, 4, 5, 11, 75, 171, 172, 384, ……
- 「素連乘素數」中的老幾

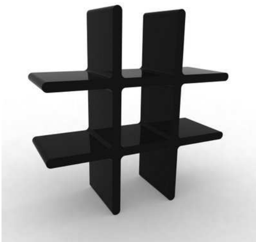
素連乘素數 (Primorial Prime)

- P_n 第 n 個素數
- P# = 所有不大於 P 的素數乘積，稱作「素連乘」。
- 例：5# = 5*3*2 = 30
- 型如素連乘數 +1 或 -1 的素數

- P_1# + 1 = 2 + 1 = 3
- P_2# + 1 = 2*3 + 1 = 7
- P_3# + 1 = 2*3*5 + 1 = 31
- P_4# + 1 = 2*3*5*7 + 1 = 211
- P_5# + 1 = 2*3*5*7*11 + 1 = 2311
- P_6# + 1 = 2*3*5*7*11*13 + 1 = 30031 = 59*509

下一個素連乘素數？

- $P_{11}\# + 1 = 2*3*5*7*11*13*17*19*23*29*31 + 1 = 200560490131$
- $P_{75}\# + 1 = ???$
- 現在已知最大的是：
- 843301# - 1 (365851 位)
- 392113# + 1 (169966 位)



3

- 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8, 9, 5, ……
- 「最大素冪因子」

何謂素冪因子？

- $100 = 2^2 * 5^2$，它的素冪因子有：$2^2 = 4$ 及 $5^2 = 25$。
- $84 = 2^2 * 3 * 7$，它的素冪因子有：$2^2 = 4$ 及 3 及 7。
- 由此可知 6 的素冪因子有：2 和 3。而最大的便是 3 了。

素因子連乘式

- 全部數論問題就是以何種方法把自然數分解為素因子。

法國數學家費馬
(Pierre de Fermat 1601-1665)

- 公因子、公倍數、素性、整除性

- 某正整數乘以 360 後為一完全立方數，求該正整數的最小可能值。

- 答： 360 $= 36 * 10$
  $= 2^2 * 3^2 * 2 * 5$
  $= 2^3 * 3^2 * 5$

所以某數乘以 360 後應為
$2^3 * 3^3 * 5^3$，所以某數為
$3*5^2 = 75$。

7

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, ……
- 「虧數」

數有盈虧？

- 計算某正數的真因子總和：
- 10 的因子有 1, 2, 5, 10，
  真因子總和 = 1 + 2 + 5 = 8
  10 是虧數。
- 20 的因子有 1, 2, 4, 5, 10, 20，
  真因子總和 = 1+2+4+5+10 = 22
  20 是豐數。
- 所有素數的真因子總和也是 1。

- 1：真因子總和 = 0
- 2：真因子總和 = 1
- 3：真因子總和 = 1
- 4：真因子總和 = 1 + 2 = 3
- 5：真因子總和 = 1
- 7：真因子總和 = 1
- 8：真因子總和 = 1 + 2 + 4 = 7
- 那麼 6 呢？

完美的六

- 6 不是豐數。最小的豐數是 12。
- 6的真因子總和 = 1+2+3 = 6 。
- 美和善很罕見，屈指可數，但醜和惡比比皆是。同樣地，豐數和虧數很常見，而且沒有規律，這類數的發現並無條理可循；但完全數卻屈指可數，而且顯現適當的規律。

古希臘數學家尼科馬霍斯
(Nichomachus 約60 – 約120)

下一個完全數

- 下一個完全數 (Perfect Number) 是 28。
- 28 的眞因子總和 = 1+2+4+7+14 = 28 。
- 完全數的公式：

完全數 $= 2^{P-1} * (2^P - 1)$

其中 P 和 $(2^P - 1)$ 均爲素數。

P	$2^P - 1$	$2^P - 1$ 的素性	完全數
2	3	素數	6
3	7	素數	28
5	31	素數	496
7	127	素數	8128
11	1023	合數	

完全數算式的問題

- 算式產生的是完全數，但是不是所有完全數都可由該算式計出來呢？
- 算式產生的全是偶數，會不會有奇完全數呢？

奇完全數猜想

- 尋找奇完全數
- 法國數學家笛卡兒（Rene Descartes 1596 – 1650）曾嘗試否定奇完全數，找尋過程中找到一個假的奇完全數：198585576189
  $= 3^2 * 7^2 * 11^2 * 13^2 * 22021$
- 但笛卡兒也知這數是假的，
  因為 22021 不是素數。
  $(22021 = 19^2 * 61)$

找尋或否定奇完全數猜想

- 現在不論找尋到奇完全數，或是否定其存在，也足以名留青史。
- 尋找的方向：
- 不同素因子的個數
  (不同的>9，相同的>75)
- 奇完全數的下界 $(> 10^{300})$
- 最大素因子的下界（不少於 7 個位）
- 奇完全數的積性結構

梅森素數

- 找尋完全數的另一個條件正是要求 P 和 $(2^P - 1)$ 均為素數。
- 這 $(2^P - 1)$ 稱為梅森素數（Mersenne Prime）。
- 梅森素數十分稀有，至今僅得 47 個，故完全數亦只有 47 個。當中最大的一個為 $2^{43112609} - 1$，該數有 12978189 個數位，亦是現存已知最大的素數。（2008年 Edson Smith）

GIMPS

- Great Internet Mersenne Prime Search
  網上尋找梅森素數計劃
- 以獎金鼓勵數學工作者找尋素數
- 運用電腦程式
- 運用梅森數因子的特性
- 運用分散式計算
- 運用電腦的剩餘時間

下一個數會是 2011 嗎？

- 1, 2, 3, 4, 5, 2011.
- 理由是它們同是：

$x^6 - 2026x^5 + 30250x^4 - 171160x^3 + 452749x^2 - 551134x + 241320 = 0$

這方程的根。

- 作方程 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-2011)=0$
- 把上述方程展開，
- 這樣任何一個數都可以是答案。
- 只要我們不自建籬笆便是。

http://www.wolframalpha.com/

還有更多……

- 我不知道世界怎樣看我，不過我覺得自己就沙灘上玩耍的小男孩，偶然發現一塊光滑的石子或美麗的貝殼；而我面前的大海，卻蘊藏無數未經發掘的真相。

英國物理學家牛頓
(Issac Newton 1642-1727)

參考網址

- The Online Encyclopedia of Integer Sequence : http://oeis.org/
- GIMPS : http://www.mersenne.org/default.php
- Prime Page : http://primes.utm.edu/
- Landon Curt Noll : http://www.isthe.com/chongo/index.html
- Mathworld : http://mathworld.wolfram.com/
- Wolfram Alpha : http://www.wolframalpha.com/
- 素網 : http://goodprimes.eu5.org/

完